

文章编号:1000-8055(2012)09-1967-07

振荡管流换热的解析解及强化换热特性

李明震, 董金钟

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 经求解随时间正弦变化的非定常压力梯度下, 管内流体振荡时的运动方程和能量方程, 得到了振荡管流换热的速度场、温度场以及当量导温系数的解析解。通过分析可知, 影响管内振荡流轴向换热的无量纲参数主要有: 无量纲振荡频率, 无量纲振幅和流体普朗特数。其中, 无量纲振荡频率直接影响流动的速度分布, 且随着无量纲振荡频率增加, 强化换热效果增强。随着无量纲振幅的增大, 管内流动有效导热面积增加, 等温面法向温度梯度也增加, 使得强化换热效果增强。强化换热效果同样也随流体普朗特数的增加而增强。

关 键 词: 振荡流; 强化换热; 换热机理; 解析解; 管流

中图分类号: V231.1; TK124

文献标志码: A

Theoretical solution on heat transfer in oscillatory pipe flow and analysis of enhanced heat transfer

LI Ming-zhen, DONG Jin-zhong

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: By solving the momentum and energy equations of the oscillatory flow driven by a sinusoidally varying pressure gradient, the general analytical solutions of the velocity profile, the temperature profile and the enhanced thermal diffusivity were obtained. Based upon the analytical solutions, it is found that three parameters influenced the enhanced heat transfer for the problem are the dimensionless oscillatory frequency, the dimensionless amplitude and the Prandtl number of the fluid. The velocity profile is directly determined by the dimensionless oscillatory frequency, and the enhanced thermal diffusivity increases with the increase of dimensionless oscillatory frequency, dimensionless amplitude and Prandtl number.

Key words: oscillatory flow; enhanced heat transfer; heat transfer mechanism; theoretical solution; pipe flow

流体的强化传热对于提高热交换器的效率具有十分重要的作用, 各种高新技术的发展直接推动了强化传热的研究的不断进步。近年来, 基于振荡流的强化换热技术得到了微电子领域和纳米流体应用领域的关注^[1-5]。

自上世纪 80 年代开始, 振荡管流强化传热传质已经进行了许多研究。在随时间正弦变化的非

定常压力梯度作用下, 管内层流扩散要比纯分子扩散高许多倍^[6-7]。在振荡管流强化传质概念的启发下, Kurzweg、赵令德、王相锋、曹玉璋、朱谷君等人对振荡管流强化传热问题进行了系统的研究, 发表了一系列论文^[8-14]。他们的研究认为, 管内流体振荡大大强化了流体的轴向换热。

对于振荡流强化传热的机理, Kurzweg^[14] 研

收稿日期: 2011-11-22

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20120921.1251.007.html>

作者简介: 李明震(1981—), 男, 江苏靖江人, 博士生, 主要从事传热传质、斯特林发动机热力学和动力学研究。

究认为,在存在轴向温度梯度的条件下,这种换热强化有两种热能传输机理联合产生,即通过边界层和壁面的侧向扩散传输和周期性轴向对流传输.曹玉璋等^[12]从振荡流换热这一物理现象出发,认为振荡流强化轴向换热的根本原因在于管内流体轴向振荡持续地产生了一个增大的有效导热面积和增大的温度梯度所致.

Kurzweg 等^[8]给出了振荡管流传热的解析解,在求解过程中假设了无量纲振荡频率 $\alpha \gg 1$,且其结果局限于 $\alpha^2 \cdot Pr > \pi$ 时可用.曹玉璋、赵令德等^[12]从不可压振荡管流换热的微分方程出发,得出了任意 α 下的解析结果,其结果与文献^[8]进行了比较,在 $\alpha > 10$ 时,两者符合较好,但 α 较小时有明显偏差.然而,赵令德推导得出的解析解形式十分冗长繁琐,且不易分析,其相关结论只能定性地说明确换热强化的效果.

本文从能量方程解的结构出发,得出一形式简明的解析解,大大方便了对振荡流轴向换热的分析,并据此得出了振荡流换热的影响参数,并对不同参数下的强化换热特性进行了分析和讨论,最后对振荡流强化换热机理做了探讨.

1 理论模型与分析

不可压常物性牛顿流体在管长为 L 、管半径为 R 的圆直管内,在正弦压力梯度下作层流振荡流动.假设管两端与储热罐相连,储热罐内流体温度恒定,在 $x=0$ 处, $T=T_1$,在 $x=L$ 处, $T=T_2$, $T_1 > T_2$,管壁绝热.

1.1 速度场

流体在正弦变化的压力梯度下管内层流振荡流完全发展段运动方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = p_x \cos(\omega t) \quad (2)$$

其中 x, r 为管轴向和径向坐标, u 为轴向速度, p 为压力, ρ 为密度, ν 为运动黏度, p_x 为轴向最大压力梯度, ω 为振荡频率, t 为时间.

对于半径为 R 的光滑圆管,管内振荡流有如下边界条件:

$$u|_{r=R} = 0, \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=0} = 0 \quad (3)$$

由此可求得管内速度分布

$$u(r, t) = i \frac{p_x}{\rho \omega} \left[\frac{J_0(\sqrt{-i} \cdot \alpha r / R)}{J_0(\sqrt{-i} \cdot \alpha)} - 1 \right] e^{i \omega t} \quad (4)$$

其中, $\alpha = R \sqrt{\omega / \nu}$, 定义为无量纲振荡频率, J_0 为第一类 0 阶 Bessel 函数.

定义潮式位移量 Δx 为流体半个周期内截面平均的最大轴向位移量,即

$$\Delta x = \left| \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{\pi/\omega} \int_0^{2\pi} \int_0^R u(r, t) r dr d\theta dt \right| \quad (5)$$

由式(4)可求得

$$\Delta x = \frac{2 p_x}{\rho \omega^2} \left| \frac{2}{\sqrt{-i} \alpha} \frac{J_1(\sqrt{-i} \alpha)}{J_0(\sqrt{-i} \alpha)} - 1 \right| \quad (6)$$

其中 J_1 为第一类 1 阶 Bessel 函数.

这里定义的潮式位移量必须小于管长 L , 以确保在两个储热罐之间不会发生直接的对流.

1.2 温度场

忽略黏性耗散,管中流体的能量方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \quad (7)$$

其中 κ 为热扩散率.

有边界条件

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad (8)$$

假设管内流体温度有如下分布形态^[15]:

$$T(x, r, t) = \gamma [x + R g(r) e^{i \omega t}] \quad (9)$$

带入能量方程,可得

$$\frac{d^2 g(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dg(\eta)}{d\eta} + g(\eta) = \frac{if(\eta)}{\omega R} \quad (10)$$

式中

$$\eta = \sqrt{\frac{-i \omega}{\kappa}} r = \sqrt{-i} \cdot \alpha \sqrt{Pr} \frac{r}{R}$$

方程(10)为非齐次零阶 Bessel 方程,方程的通解为

$$g(\eta) = c_1 J_0(\eta) + c_2 Y_0(\eta) + g_s(\eta) \quad (11)$$

其中 c_1, c_2 为待定系数, Y_0 为第二类 0 阶 Bessel 函数, $g_s(\eta)$ 为方程(10)的特解.

赵令德等^[13]使用常微分方程待定系数法求解方程(11)的特解,解的形式复杂,且不易分析.

本文假设特解 $g_s(\eta)$ 由下式给定

$$g_s(\eta) = a_1 J_0(\eta / \sqrt{Pr}) + a_2 \quad (12)$$

则 $g_s(\eta)$ 满足方程(10),带入方程解得

$$a_1 = -\frac{p_x}{\rho \omega^2 R} \frac{Pr}{Pr-1} \frac{1}{J_0(\sqrt{-i} \cdot \alpha)},$$

$$a_2 = \frac{p_x}{\rho \omega^2 R}$$

根据边界条件,可得式(11)中系数

$$c_1 =$$

$$\frac{p_x}{\rho \omega^2 R} \frac{\sqrt{Pr}}{Pr-1} \frac{J_1(\sqrt{-i} \cdot \alpha)}{J_0(\sqrt{-i} \cdot \alpha) J_1(\sqrt{-i} \cdot \alpha \sqrt{Pr})}$$

$$c_2 = 0$$

将 c_1, c_2 以及特解 $g_s(\eta)$ 带入式(11), 得

$$g(r) = \frac{P_x}{\rho \omega^2 R} \cdot \left[\frac{\sqrt{Pr} - 1}{Pr - 1} \frac{J_1(\sqrt{-i} \cdot \alpha) J_0(\sqrt{-i} \cdot \alpha \sqrt{Pr} \cdot r/R)}{J_0(\sqrt{-i} \cdot \alpha) J_1(\sqrt{-i} \cdot \alpha \sqrt{Pr})} - \frac{Pr}{Pr - 1} \frac{J_0(\sqrt{-i} \cdot \alpha \cdot r/R)}{J_0(\sqrt{-i} \cdot \alpha)} + 1 \right] \quad (13)$$

由此可得温度分布的解析解. 相较于文献[13]给出的温度分布解, 式(13)要简单的多.

1.3 换热分析

根据前面得到的管内振荡流速度分布与温度分布, 可求得在某一管截面处, 单位时间内通过单位面积的轴向传热量为

$$q = \frac{\omega}{\pi R^2} \cdot \left[\int_0^{2\pi/\omega} \int_0^R -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} r dr dt + \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^R \rho c T u r dr dt \right] \quad (14)$$

其中 λ 为流体导热系数, c 为流体比热容.

定义当量导热系数 λ_e

$$q = -\lambda_e \gamma = -\kappa_e \rho c \gamma \quad (15)$$

其中 κ_e 为当量热扩散率, 且有

$$-(\kappa_e - \kappa) \gamma =$$

$$\frac{\omega}{\pi R^2} \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^R [T(x, r, t)]_R [u(r, t)]_R r dr dt \quad (16)$$

式中, 下标 R 表示相应复变量的实部.

带入前面得到的温度和速度分布解析解, 并对时间积分可得

$$\kappa_e - \kappa = -\frac{1}{2R} \int_0^R [g(r) \overline{f(r)} + f(r) \overline{g(r)}] r dr \quad (17)$$

式中 $f(r) e^{i\omega t} = u(r, t)$, $\overline{f(r)}$, $\overline{g(r)}$ 表示复函数 $f(r)$ 和 $g(r)$ 的共轭函数.

将式(4)和(13)代入式(17)中, 并积分得

$$\kappa_e - \kappa = \frac{P_x^2}{2\rho^2 \omega^3} \frac{1}{(Pr^2 - 1)\alpha} \left\{ \frac{J_1(\sqrt{-i}\alpha)}{J_0(\sqrt{-i}\alpha)} \left[\sqrt{i} \sqrt{Pr} \frac{J_1(\sqrt{i}\alpha)}{J_0(\sqrt{i}\alpha)} \frac{J_0(\sqrt{-i}\alpha \sqrt{Pr})}{J_1(\sqrt{-i}\alpha \sqrt{Pr})} - \sqrt{-i} Pr \right] + \frac{J_1(\sqrt{i}\alpha)}{J_0(\sqrt{i}\alpha)} \left[\sqrt{-i} \sqrt{Pr} \frac{J_1(\sqrt{-i}\alpha)}{J_0(\sqrt{-i}\alpha)} \frac{J_0(\sqrt{i}\alpha \sqrt{Pr})}{J_1(\sqrt{i}\alpha \sqrt{Pr})} - \sqrt{i} Pr \right] \right\} \quad (18)$$

2 分析结果与讨论

2.1 速度分布

图1给出了无量纲振荡频率 α 分别为3和10时, 一个振荡周期内不同相位时, 管内振荡流沿径向速度分布曲线. 其中纵坐标速度采用最大速度 $u_{\max}$ 进行无量纲化, $u_{\max}$ 为压力梯度为 p_x 的定常流动径向平均速度, 横坐标采用管半径进行无量纲化.

图1中, 当振荡频率较小时, 瞬态速度表现出准稳态的特征, 速度分布类似 Poiseuille 分布. 随着振荡频率增加, 速度梯度越来越集中在靠近壁面附近的区域内, 表现出所谓“速度环”效应. 这种分布形式可以看成是管中心区域的活塞流和管壁附近的 Stokes 边界层流动的叠加, 当振荡频率更高时, 这种现象将更加明显.

2.2 温度分布

图2所示为无量纲振荡频率 α 分别为3和10

时, 一个振荡周期内不同相位时, 管中心截面处振荡流温度分布. 其中管两端高温端 $T_1 = 360$ K, 低温端 $T_2 = 300$ K, 且管足够长, 使得 $L/\Delta x > 10$. 从图中可以看出, 温度分布也有类似“速度环”效应的“温度环”现象.

2.3 强化换热分析

文献[13-14]分别使用了 $\omega(\Delta x)^2$ 和 $\kappa(\Delta x/R)^2$ 来对式(18)中当量热扩散率进行无量纲化.

图3和4所示分别为 $Pr=7$ 和 0.7 时, 无量纲热扩散率 $(\kappa_e - \kappa)/[\omega(\Delta x)^2]$ 和 $(\kappa_e - \kappa)/[\kappa(\Delta x/R)^2]$ 随无量纲振荡角频率 α 的变化关系曲线. 图中所给出的曲线与文献[13-14]给出的曲线分布形态和量级都一致.

本文使用流体导热系数 κ 对当量热扩散率 κ_e 进行无量纲化, 表示管内流体振荡时轴向换热强化倍数.

由式(18)可得

$$\frac{\kappa_e - \kappa}{\kappa} = \frac{\alpha}{8} \left(\frac{\Delta x}{R} \right)^2 \frac{Pr}{Pr^2 - 1} \frac{1}{\left| \frac{2}{\sqrt{-i\alpha}} \frac{J_1(\sqrt{-i\alpha})}{J_0(\sqrt{-i\alpha})} - 1 \right|^2} \left\{ \frac{J_1(\sqrt{-i\alpha})}{J_0(\sqrt{-i\alpha})} \left[\sqrt{i} \sqrt{Pr} \frac{J_1(\sqrt{i\alpha})}{J_0(\sqrt{i\alpha})} \frac{J_0(\sqrt{-i\alpha} \sqrt{Pr})}{J_1(\sqrt{-i\alpha} \sqrt{Pr})} - \sqrt{-i} Pr \right] + \frac{J_1(\sqrt{i\alpha})}{J_0(\sqrt{i\alpha})} \left[\sqrt{-i} \sqrt{Pr} \frac{J_1(\sqrt{-i\alpha})}{J_0(\sqrt{-i\alpha})} \frac{J_0(\sqrt{i\alpha} \sqrt{Pr})}{J_1(\sqrt{i\alpha} \sqrt{Pr})} - \sqrt{i} Pr \right] \right\} \quad (19)$$

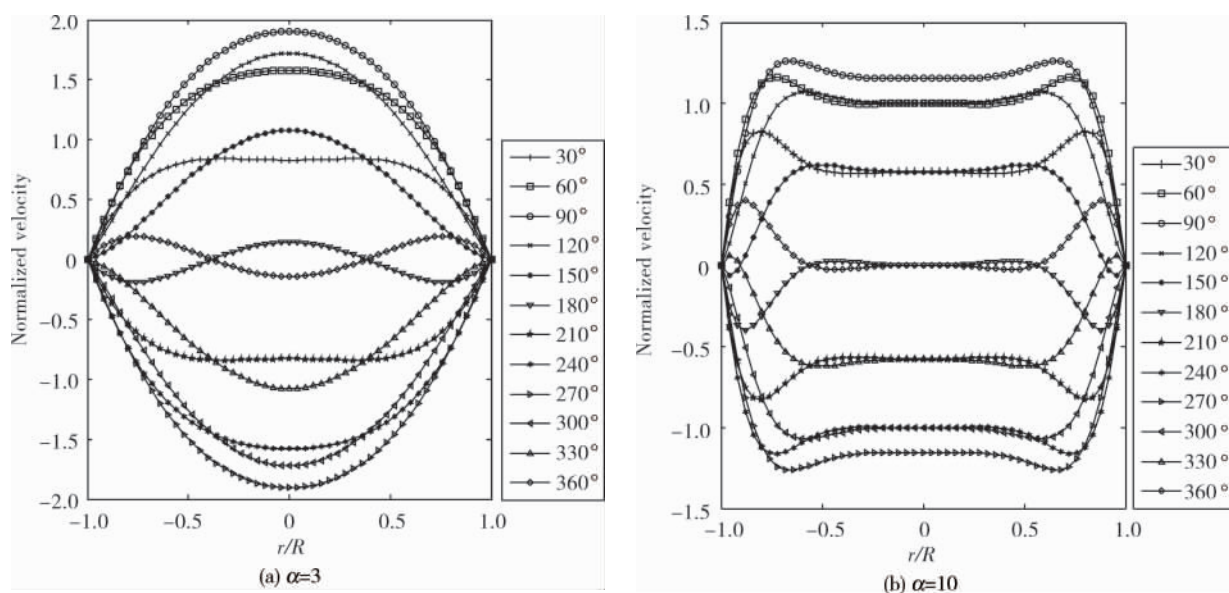


图 1 管内振荡流速度分布

Fig. 1 Velocity profile in oscillatory pipe flow

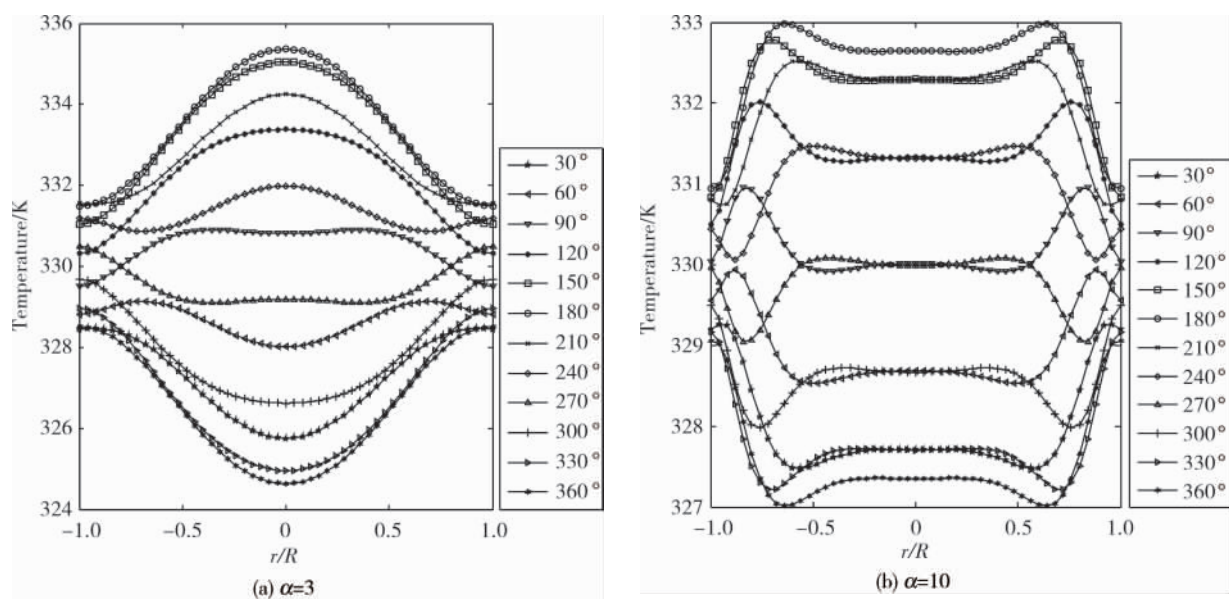


图 2 管中心处振荡流温度分布

Fig. 2 Temperature profile in oscillatory pipe flow

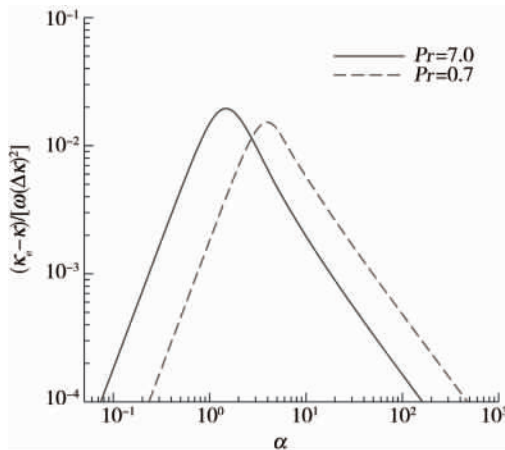


图3 无量纲热扩散率 $(\kappa_e - \kappa) / [\omega(\Delta x)^2]$ 随 α 的变化曲线

Fig. 3 Dimensionless thermal diffusivity $(\kappa_e - \kappa) / [\omega(\Delta x)^2]$ versus α

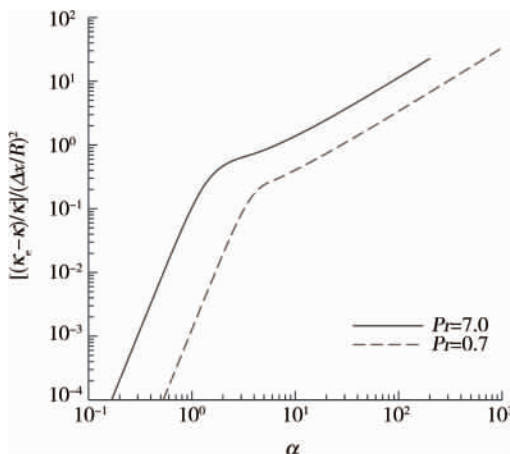


图4 无量纲热扩散率 $[(\kappa_e - \kappa) / \kappa] / (\Delta x / R)^2$ 随 α 的变化曲线

Fig. 4 Dimensionless thermal diffusivity $[(\kappa_e - \kappa) / \kappa] / (\Delta x / R)^2$ versus α

由式(19)可知,影响振荡流轴向强化换热无量纲参数主要有:无量纲振荡频率 α 、无量纲振幅 $\Delta x / R$ 、流体 Pr 。

在给定 Pr 和无量纲振幅 $\Delta x / R$ 时,计算得出轴向换热强化倍数随无量纲振荡频率 α 的变化关系如图5所示。从图中可以看出,随着 α 增加,强化换热效果越明显。图中还给出了不同 Pr 的变化情况,随着 Pr 的增加,强化换热倍数增大,但换热强化的比率降低。

在给定 Pr 和无量纲振荡频率 α 时,计算得出轴向换热强化倍数随无量纲振幅 $\Delta x / R$ 的变化关系如图6所示。从图中可以看出,随着 $\Delta x / R$ 增加,强化换热效果越显著。图中 Pr 变化引起的轴

向换热强化效果与前面分析一致。

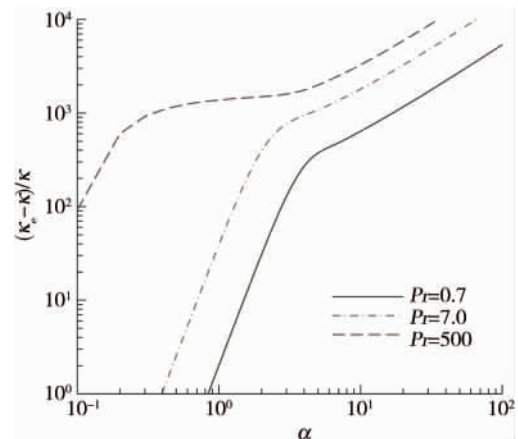


图5 无量纲热扩散率 $(\kappa_e - \kappa) / \kappa$ 随 α 的变化曲线

Fig. 5 Dimensionless thermal diffusivity $(\kappa_e - \kappa) / \kappa$ versus α

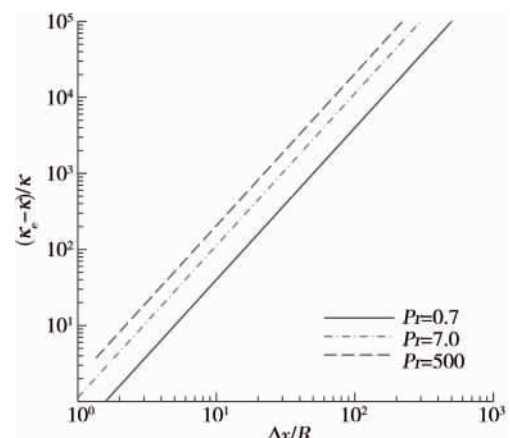


图6 无量纲热扩散率 $(\kappa_e - \kappa) / \kappa$ 随 $\Delta x / R$ 的变化曲线

Fig. 6 Dimensionless thermal diffusivity $(\kappa_e - \kappa) / \kappa$ versus $\Delta x / R$

2.4 强化换热机理分析

1) 从速度分布与温度分布形态可以看出,振荡流在靠近管壁的区域形成了一薄边界层以及大的径向温度梯度,使得核心区与边界层产生大量的热量交换。同时具有这种径向导热性的流体又由于周期性的轴向对流作用,使得热端与冷端产生持续的轴向传热效果。总的说来,就是由速度场与温度场的协同作用,产生了强化换热的效果。

2) 无量纲振荡频率 α 实际上反映了管壁上黏性扰动传递到管中心所需时间与振荡半周期之比,是边界上黏性扰动传递深度的度量。随着 α 的增大,在不同半径处的流体运动产生相位差,速度

分布偏离抛物面发生变形,使得在同样 $\Delta x/R$ 条件下的换热面积增长和温度梯度增长变得更加显著,因此强化换热的效果也显著增强.

3) 管内流体处于静止状态时,热量依靠导热方式传递,而导热率取决于导热面积及其法向温度梯度.静止时,等温面与管截面重合,轴向导热面积即为管截面积,等温面法向温度梯度即 $(T_h - T_l)/L$.当流体围绕其平衡位置振荡时,平衡位置两侧的冷热流体将交替的深入到对方中去,这时,有效的导热面积将显著增大,并且随着振幅的增加而急剧加大.另一方面,振荡也使等温面法向温度梯度明显增大,且也随着振幅的增加而加大.因此,无量纲振幅 $\Delta x/R$ 的加大将产生强化换热的效果.

4) $\alpha\sqrt{Pr} = R\sqrt{\omega/\kappa}$,它反映了管中心的热扰动传递到管壁上的时间与振荡半周期之比,因此也是温度穿透深度的量度. $R\sqrt{\omega/\kappa}$ 越大,温度梯度就越大,从而增强等温面的法向导热,强化了管内振荡流的轴向换热能力.当其他参数不变,增加 Pr ,自然会使得 $R\sqrt{\omega/\kappa}$ 增大,使得轴向换热效果增强.

3 结 论

本文从振荡管流换热方程解的结构出发,得出一形式十分简明的振荡流轴向换热理论分析解,经过分析,主要得到以下结论:

1) 振荡流条件下,管内速度分布和温度分布都存在“环效应”,即速度梯度和温度梯度都集中在靠近管壁的区域,核心区速度分布和温度分布较平缓.

2) 影响振荡流强化换热的无量纲参数有无量纲振荡频率 α 、无量纲振幅 $\Delta x/R$ 和流体 Pr .

3) 振荡流强化换热是速度场和温度场协同作用的结果.

4) 无量纲振荡频率 α 反映了管壁上黏性扰动传递到管中心所需时间与振荡半周期之比,它直接影响流动的速度分布.随着 α 增加,强化换热效果增强.

5) 随着无量纲振幅 $\Delta x/R$ 的增大,管内流动有效导热面积增加,等温面法向温度梯度也增加,使得强化换热效果增强.

6) 随着 Pr 的增加,强化换热倍数加大,但换热强化的比率降低.

参考文献:

- [1] Leong K C, Jin L W. Heat transfer of oscillating flow and steady flows in a channel filled with porous media[J]. Int Comm Heat Mass Transf, 2004, 31: 63-72.
- [2] Walsh T E, Yang K T, Nee V W, et al. Forced convection cooling in microelectronic cabinets via oscillatory flow techniques[C] // Proceedings of the Third Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics Conference, Amsterdam; Elsevier, 1993: 641-648.
- [3] Das S K, Putra N, Thiesen P, et al. Temperature dependence of thermal conductivity enhancement for nanofluids[J]. J. Heat Transfer, 2003, 125: 567-574.
- [4] Lambert A A, Cuevas S, del Río J A, Enhanced heat transfer using oscillatory flows in solar collectors[J]. Solar Energy J. 2006, 80: 1296-1302.
- [5] Lambert A A, Cuevas S, del Río J A, et al. Heat transfer enhancement in oscillatory flows of newtonian and viscoelastic fluids[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2009, 52: 5472-5478.
- [6] Watson E. Diffusion in oscillatory pipe flow[J]. J Fluid Mech, 1983, 133: 233-244.
- [7] Joshi C H, Kamm R D, Drazen J M, et al. An experimental study of gas exchange in laminar oscillatory flow[J]. J Fluid Mech, 1983, 133: 245-254.
- [8] Kurzweg U H, Zhao L D. Heat transfer by high-frequency oscillations: a new hydrodynamic technique for achieving large effective thermal conductivities[J]. Phys Fluids, 1984, 27: 2624-2627.
- [9] Kurzweg U H. Enhanced heat conduction in fluids subjected to sinusoidal oscillations[J]. J Heat Transfer, 1985, 107: 459-462.
- [10] 赵令德, 朱谷君, 曹玉璋. 管内流体的振荡传热分析[J]. 航空动力学报, 1987, 2(2): 153-158.
ZHAO Lingde, ZHU Gujun, CAO Yuzhang. Analysis on heat transfer of fluids oscillated within pipes [J]. Journal of Aerospace Power, 1987, 2(2): 153-158. (in Chinese)
- [11] 王相锋, 高红岩, 朱定国, 等. 管内流体振荡强化传热的实验研究[J]. 工程热物理学报, 1989, 10(1): 78.
WANG Xiangfeng, GAO Hongyan, ZHU Dingguo, et al. Experimental study on enhanced heat transfer in fluids oscillated within pipes[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 1989, 10(1): 78-80. (in Chinese)
- [12] 曹玉璋, 赵令德, 朱谷君. 管内流体振荡强化换热的机理研究[J]. 航空动力学报, 1989, 4(2): 105-109.
CAO Yuzhang, ZHAO Lingde, ZHU Gujun. Mechanism of enhanced heat transfer in fluids oscillated within pipes[J]. Journal of Aerospace Power, 1989, 4(2): 105-109. (in Chinese)
- [13] 赵令德, 朱谷君, 曹玉璋, 等. 振荡管流换热的理论解[J]. 力学学报, 1992, 24(5): 614-619.

- ZHAO Lingde, ZHU Gujun, CAO Yuzhang, et al. Theoretical solution on heat transfer in oscillatory pipe flow[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1992, 24(5): 614-619. (in Chinese)
- [14] Kurzweg U H. Enhanced heat conduction in oscillating viscous flows within parallel-plate channels [J]. J. Fluid Mech. , 1985, 291: 130-156.
- [15] Chatwin P C. On the longitudinal dispersion of passive contaminant in oscillatory flows in tubes [J]. J. Fluid Mech. , 1975, 71(3): 513-527.